01/11/16

<u>Πρόταση</u>: Έστω $P_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} s^{n}$ και $F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^{n}$

με $|s|<1$. Τότε $P_{ij}(s) = [1 + P_{jj}(s)] F_{ij}(s)$

<u>Απόδ.</u>: s^1. $P_{ij}^{(1)} = f_{ij}^{(1)}$

s^2. $P_{ij}^{(2)} = P$ (να πάω $i \to j$ στο 1ο βήμα κ' να παραμείνω ή να πάω από το $i \to j$ στο 2ο βήμα για πρώτη φορά) $=$

$= f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(2)}$

s^3. $P_{ij}^{(3)} = P$ (να πάω $i \to j$ στο 1ο βήμα για πρώτη φορά και να ξαναβρεθώ εκεί στο 3ο βήμα ή -//- $i \to j$ 2ο βήμα για πρώτη φορά κ' να παραμείνω ή -//- $i \to j$ στο 3ο βήμα για πρώτη φορά.) $=$

$= f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(2)} + f_{ij}^{(2)} P_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(3)}$

s^4. $P_{ij}^{(4)} = f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(3)} + f_{ij}^{(2)} P_{jj}^{(2)} + f_{ij}^{(3)} P_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(4)}$

$\vdots$

$$
\begin{aligned}
(s).\quad P_{ij}(s) &= s f_{ij}^{(1)} [1 + s P_{jj}^{(1)} + s^2 P_{jj}^{(2)} + \dots] + \\
&+ s^2 f_{ij}^{(2)} [1 + s P_{jj}^{(1)} + s^2 P_{jj}^{(2)} + \dots] + \\
&+ s^3 f_{ij}^{(3)} [1 + s P_{jj}^{(1)} + s^2 P_{jj}^{(2)} + \dots] + \dots \to
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \boxed{P_{ij}(s) = (1 + P_{jj}(s)) F_{ij}(s).}$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $j \in S$ μιας στοχαστικής Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) η j είναι παροδική $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει και τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$ συγκλίνει $\forall i \in S$.

(β) η j είναι επ/κή $\Leftrightarrow$ η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ αποκλίνει και τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$ αποκλίνει $\forall i \to j$

Απόδειξη: (α) j-παροδική $\Leftrightarrow f_{jj}^{*} < 1$, δηλ $\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1}$

δηλαδή $\Leftrightarrow \boxed{F_{jj}(1)<1}$. Θέλω νδο το προηγ. συμβαίνει ανν $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < +\infty$

Είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} P_{jj}^{(n)} = P_{jj}(1)$

Όμως $\boxed{P_{jj}(1) = (1+P_{jj}(1))F_{jj}(1)}^{(*)} \Rightarrow \boxed{(1-F_{jj}(1))P_{jj}(1) = F_{jj}(1)}$ (**)

Καθώς $F_{jj}(1)<1 \Rightarrow P_{jj}(1) = \frac{F_{jj}(1)}{1-F_{jj}(1)} < +\infty$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1)$

Όμως $P_{ij}(1) = [1+P_{jj}(1)]F_{ij}(1)$ (***) $\Bigg\} \xrightarrow{(*)} P_{jj} = [1-F_{jj}(1)]\,F_{jj}(1)$

άρα $P_{jj}(1) = \frac{F_{jj}(1)}{1-F_{jj}(1)}$

Από την (***) $\Rightarrow P_{ij}(1) = \left[1+\frac{F_{jj}(1)}{1-F_{jj}(1)}\right]F_{ij}(1) = \frac{F_{ij}(1)}{1-F_{jj}(1)} < +\infty$

β) j-επαν/κή ανν $f_{jj}^{*}=1$ δηλ ανν $\sum_{n=1} f_{jj}^{(n)} = 1$
δηλ ανν. $F_{jj}(1)=1$ δηλ ανν $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = +\infty$

Είναι $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = P_{jj}(1)$

Όμως $P_{jj}(1) = [1+P_{jj}(1)] \Rightarrow \boxed{P_{jj}(1)=+\infty}$

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1)$. Όμως $P_{ij}(1) = [1+\underbrace{P_{jj}(1)}_{+\infty}]F_{ij}(1)$

Θέλω $i \to j$ διότι αλλιώς δεν θα μπορούσα να εξασφαλίσω ότι ~~Fij(1)~~ $f_{ij}^{(n)} \neq 0$ και άρα θα 'χα $(+\infty)\cdot 0$.

Παρατηρήσεις:

① j-παροδική αν-ν

(i) $f_{jj}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1$ $\qquad \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = 0 = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει και τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$, $\forall i$

② j-επ/κή αν-ν

(i) $f_{jj}^{*} = 1$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ αποκλίνει κ' τότε $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$ αποκ'. $\forall i \to j$.

Πρόταση 1: Αν $i \in S$ είναι επαν/κή και $i \to j \Rightarrow j \to i$
Με άλλα λόγια: i επ/κή κ' $i \to j \Rightarrow i \leftrightarrow j$

Πρόταση 2: Από επαν/κές καταστάσεις μόνο επαν/κές καταστάσεις είναι προσιτές. Δηλαδή αν $i \in S$ επαν/κή και $i \to j \Rightarrow j$ επαν/κή.

Αποδ: i επαν/κή $\Rightarrow f_{ii}^{*} = 1$.
$i \to j \Rightarrow \exists n \geq 0 : P_{ij}^{(n)} > 0$

Τότε από προτ_1 $\Rightarrow j \to i$ δηλ $m \geq 0 : P_{ji}^{(m)} > 0$.

Είναι i-επ/κή $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}^{(k)} = +\infty$

$$\text{Είναι: } \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} P_{jj}^{(\ell)}}_{\text{έχει περισσότερα βήματα.}} \geq \sum_{\ell=n+m+1}^{\infty} P_{jj}^{(\ell)} = \sum_{\ell=1}^{\infty} P_{jj}^{(\ell+n+m)} \overset{(*)}{\geq} \sum_{\ell=1}^{\infty} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(\ell)} P_{ij}^{(n)} =$$

$$= \underbrace{P_{ji}^{(m)}}_{>0} \underbrace{P_{ij}^{(n)}}_{>0} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} P_{ii}^{(\ell)}}_{+\infty} = +\infty$$

(υπόθεση)

(*) $j \to j$ σε $\ell+n+m$ βήματα

ένας τρόπος: $j \to i$ σε m-βήματα

$i \to i$ σε ℓ-βήματα

$i \to j$ σε n-βήματα

άρα $P_{jj}^{(\ell+n+m)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(\ell)} \cdot P_{ij}^{(n)}$

Θεώρημα: Έστω $j \in S$ είναι μια επανλκή και απεριοδική ($d_j = 1$) και έστω $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ (μέσος χρόνος επανάληψης). Τότε: $\lim_{n=\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{F_{ij}(1)}{\mu_j}$$

Συνέπειες: • Ασθενώς Επ/κή $\lim P_{jj}^{(n)} = 0$ (διότι $\mu_j = +\infty$)

Θεώρημα: Σε μια κλάση ~~ισο~~ ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων, όλες οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου, δηλαδή ή όλες παροδικές ή όλες θετικώς επαν/κές ή όλες ασθενώς επαν/κές.

Απόδ: (Έστω i-παροδική) Έστω 2 καταστάσεις i, j τ.ω. $i \leftrightarrow j$.

Υποθ. ότι j-επαν/κή. ⇒ από επ/κές καταστάσεις μόνο επαν/κές καταστάσεις προσιτές ⇒ i-επαν/κή άτοπο άρα j-παροδική.

Έστω i-επαν/κή και $i \leftrightarrow j \Rightarrow j$ επαν/κή

Μένει νδο αν i-ασθενώς επ/κή (θετικώς) κ' j-ασθενώς (θετικώς) επαν/κή.

Ασθενώς - επαν/κή η i: $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

Θέλω νδο $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = 0$

$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow \begin{cases} \exists m \geq 0 : P_{ij}^{(m)} > 0 \\ \exists k \geq 0 : P_{ji}^{(k)} > 0. \end{cases}$$

$$P_{ii}^{(n+m+k)} \geq P_{jj}^{(n)} \cdot \underbrace{P_{ij}^{(m)}}_{>0} \cdot \underbrace{P_{ji}^{(k)}}_{>0}$$

$$\lim(\ ) \geq \lim(\ '' \ ) \Rightarrow 0 \geq \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = 0$$

Θεώρημα: Μία Μη-διαχωρ. Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων είναι θετικώς επαναληπτική.

Αποδ: Έστω $j \in S$ ασαφώς επ/κή ή παροδική.
Τότε $\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$. Πεπ/νο πλήθος κατ/σεων, έστω κ.

Άρα $\sum_{i=1}^{k} P_{ij}^{(n)} = P_{1j}^{(n)} + \dots + P_{kj}^{(n)} = 1$

Άρα το $\lim P_{ij}^{(n)} = 0$ άτοπο.